第一章
集合和简易逻辑

学习目标

1. 掌握集合的定义及其表示方法.

2. 掌握空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法.

3. 掌握符号$\subseteq$、$\subsetneqq$、$\in$、$\notin$、$\cap$、$\cup$、$\varnothing$的意义，并能正确使用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.

4. 掌握充分条件、必要条件、充要条件等概念.

1.1 集　　合

集合解析

一、集合的概念

1. **集合**　具有某种属性的事物的全体称为集合.集合常用大写字母A、B、C等表示，如$A=\{5，6，7，8\}$.

2. **元素**　集合中的每一个对象叫作这个集合的元素，也叫“元”.元素常用小写字母a、b、c等表示.集合的元素可以是任何事物，如数字、人、字母、别的集合等.元素具有无序性、互异性和确定性.

3. **元素与集合的关系**　元素与集合是个体与整体的关系.如果a是集合A的元素，记作$a\in A$，读作“a属于A”；如果a不是集合A的元素，记作$a\notin A$，读作“a不属于A”.

4. **有限集、无限集、单元素集、空集**

(1) **有限集**是含有有限个元素的集合，如$A=\{1，2，3\}$；

(2) **无限集**是含有无限个元素的集合，如$A=\{x \mid x>0\}$；

(3) **单元素集**是只有一个元素的集合，如$A=\{1\}$；

(4) **空集**是不含任何元素的集合，空集用$\varnothing$表示.空集不是无，它是内部没有元素的集合.若将集合想象成一个袋子和它里面的事物，则空集就是里面没装事物的空袋子.

5. **数集**　元素全为数的集合叫作数集，常见的数集有：

(1) **实数集**　全体实数组成的集合，用符号$\mathbf{R}$表示.

(2) **有理数集**　全体有理数组成的集合，用符号$\mathbf{Q}$表示.

(3) **整数集**　全体整数组成的集合，用符号$\mathbf{Z}$表示.

①**非负整数集（自然数集）**，用$\mathbf{N}$表示.根据国家标准，现在自然数集包括元素0

(以前不包括元素 0);

②**正整数集**,用 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$ 表示.正整数集不包括元素 0.

二、集合的表示法

1. **列举法** 列举法是把集合的元素一一列举出来,并写在大括号“{ }”里的方法,如$A=\{1,2,3\}$;红色、白色、蓝色和绿色组成的集合 D 可写成 $D=$ {红色,白色,蓝色,绿色}.

2. **描述法** 描述法是把集合中的元素的公共特性写在大括号“{ }”里的方法,如所有等腰直角三角形组成的集合 A 可写成 $A=$ {等腰直角三角形};方程 $x^2+x-6=0$ 的根组成的集合 B 可写成 $B=\{x \mid x^2+x-6=0\}$;大于零的前三个自然数的集合 C 可写成 $C=$ {大于零的前三个自然数}.

3. **图解法** 在不严格的意义下,为直观起见,有时也用图来表示集合,如图 1-1 所示,集合 $A=\{a,b\}$,$C=\{c,d\}$.

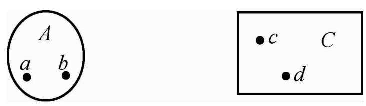

图 1-1

三、集合与集合的关系和运算

1. **子集** 对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则集合 A 叫作集合 B 的**子集**,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.在国家标准中,“$\subseteq$”可用“$\subset$”代替,“$\supseteq$”可用“$\supset$”代替.

子集的性质:

(1) 任何一个集合 A 是它本身的子集;

(2) 空集是任何一个集合 A 的子集;

(3) 对于集合 A、B、C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

真子集 如果 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,则集合 A 叫作集合 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

如把我们学校看作是一个集合 A,则我们班就是 A 的真子集,又如所有男性是所有人的真子集.

2. **相等的集合** 对于两个集合 A 与 B,如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,那么称这两个集合相等,即两个包含的元素完全相同的集合相等,记作 $A=B$.

3. **交集** 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫作 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,读作“A 交 B”,如图 1-2 所示.

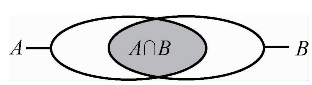

图 1-2

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

交集的性质：

（1）$A\cap A=A$；　　（2）$A\cap\varnothing=\varnothing$；　　（3）$A\cap B=B\cap A$（交换律）.

例 1.1　{1，2} ∩ {红色，白色} $=\varnothing$；

{1，2，绿色} ∩ {红色，白色，绿色} = {绿色}；

{1，2} ∩ {1，2} = {1，2} .

4. **并集**　由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫作 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”，如图 1－3 所示 .

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

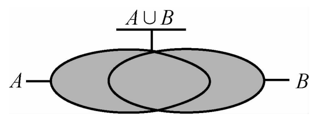

图 1－3

并集的性质：

（1）$A\cup A=A$；　　（2）$A\cup\varnothing=A$；　　（3）$A\cup B=B\cup A$（交换律）.

例 1.2　{1，2} ∪ {红色，白色} = {1，2，红色，白色}；

{1，2，绿色} ∪ {红色，白色，绿色} = {1，2，红色，白色，绿色}；

{1，2} ∪ {1，2} = {1，2} .

5. **全集**　如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合就可以看作是一个**全集**，全集常用 U 表示 .

6. **补集**　把 U 分成 A 和 B 两个集合，则 A 是 B 的补集，B 是 A 的补集 . U 中 A 的补集记作 $\complement_U A$（当 U 明确时 U 中 A 的补集简记为 $\complement A$），U 中 B 的补集记作 $\complement_U B$（当 U 明确时 U 中 B 的补集简记为 $\complement B$）.

1.2　简易逻辑

简易逻辑的基本概念

1. **充分条件**　如果 A 成立，那么 B 成立，表示为“$A\Rightarrow B$”（由 A 推出 B），就说条件 A 是 B 成立的充分条件 . 如“有单车，我可以去花都”，“有单车”是“我可以去花都”的充分条件 .

2. **必要条件**　如果 B 成立，那么 A 成立，表示为“$B\Rightarrow A$”（由 B 推出 A），就说条件 A 是 B 成立的必要条件 . 如“如果要实现机械化，就必须有足够的钢铁”，“有足够钢铁”是“实现机械化”的必要条件 .

3. **充要条件**　如果既有 $A\Rightarrow B$，又有 $B\Rightarrow A$，表示为 $A\Leftrightarrow B$，那么就说条件 A 是 B 成立的充要条件 . 如“三角形等边是三角形等角的充要条件” .

4. **充分而非必要条件**　由 A 可以得出 B，但是 B 不一定能得出 A，则 A 是 B 的充分而非必要条件 .

5. **必要而非充分条件**　由 B 可以得出 A，但是 A 不一定能得出 B，则 A 是 B 的必要而非充分条件.

6. **既不充分也不必要条件**　由 A 不能得出 B，由 B 也不能得出 A，则 A 是 B 的既不充分也不必要条件.

例 1.3　指出下列各组命题中 A 是 B 的什么条件.

(1) A：$(x-3)(x-2)=0$；B：$x-2=0$.

(2) A：同位角相等；B：两直线平行.

(3) A：$x=3$；B：$x^2=9$.

(4) A：四边形的对角线相等；B：四边形是平行四边形.

(5) A：$x>0$；B：$x^2>0$.

(6) A：$x^2>0$；B：$x>0$.

解　(1) A 是 B 的必要而非充分条件（$B\Rightarrow A$，而 $x-3=0$ 时，$x-2$ 不是 0，即 $A\nRightarrow B$）.

(2) A 是 B 的充要条件（$A\Leftrightarrow B$）.

(3) A 是 B 的充分而非必要条件（$A\Rightarrow B$，$B\nRightarrow A$，因为 B 中 x 可以是 -3）.

(4) A 是 B 的既不充分也不必要条件（$A\nLeftrightarrow B$）.

(5) A 是 B 的充分而非必要条件.

(6) A 是 B 的必要而非充分条件.

本章同步练习

一、选择题

1. 满足条件 $\{1, 2\}\subsetneqq M\subsetneqq\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 M 的个数是　（　　）

(A) 8　　(B) 7　　(C) 6　　(D) 5

2. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，集合 $P=\{x \mid x=n\}$，$Q=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{n}{2}\right\}$，$R=\left\{x \,\middle|\, x=n-\frac{1}{2}\right\}$，则　（　　）

(A) $Q\subseteq P$　　(B) $Q\subseteq R$

(C) $Q=P\cap R$　　(D) $Q=P\cup R$

3. M，N，S 是三个集合，条件 p：$S\subsetneqq M$，条件 q：$S\subsetneqq(M\cup N)$，则 p 是 q 的（　　）

(A) 必要不充分条件　　(B) 充分不必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 设全集 $U=\{a, b, c, d, e\}$，$M=\{a, c, d\}$，$N=\{b, d, e\}$，那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 等于　（　　）

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$

(C) $\{a, c\}$　　(D) $\{b, e\}$

5. 若集合 $A=\{3, a\}$，$B=\{x \mid x^2-3x<0, x\in\mathbf{Z}\}$，且 $A\cap B=\{1\}$，则 $A\cup B$ 等于　（　　）

(A) $\{1, 3, a\}$　　(B) $\{1, 2, 3, a\}$

(C) $\{1, 2, 3\}$　　(D) $\{1, 3\}$

6. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{1, 2, 3, 4\}$，集合 $N=\left\{x \middle| x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$，则 $M\cap(\complement_U N)=$　(　　)

(A) $\{4\}$　　(B) $\{3, 4\}$　　(C) $\{2, 3, 4\}$　　(D) $\{1, 2, 3, 4\}$

7. 设集合 $M=\left\{x \middle| \frac{8}{x+3}\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 M 中元素个数为　(　　)

(A) 2 个　　(B) 4 个　　(C) 8 个　　(D) 6 个

8. 若集合 $M=\{x \mid x^2-2x-3<0\}$，$P=\{x \mid |x|<a\}$，且 $P\subsetneqq M$，则实数 a 的取值范围是　(　　)

(A) $0<a\leqslant1$　　(B) $a\leqslant1$

(C) $-1<a\leqslant3$　　(D) $a<1$

9. 设集合 $M=\{(x, y) \mid (x-2)^2+y^2=4\}$，集合 $N=\{(x, y) \mid (x-1)^2+y^2=1\}$，则 M 和 N 的关系是　(　　)

(A) $N\subsetneqq M$　　(B) $M\cap N=\varnothing$

(C) $N\subseteq M$　　(D) $M\cap N=\{(0, 0)\}$

二、填空题

10. 若 $A=\{(x, y) \mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x, y) \mid x^2-ay-b=0\}$，$A\cap B\supseteq\{(1, 2)\}$，则 $a=$________，$b=$________.

11. $\neg A$ 是命题 A 的否定，如果 B 是 $\neg A$ 的必要不充分条件，那么 $\neg B$ 是 A 的________条件.

12. $M=\{x \mid 15\leqslant x\leqslant125, x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x \mid x=4n+1, n\in\mathbf{N}_+\}$，则 $M\cap N$ 中所有元素之和为________.

13. 已知集合 $A=\{-1, 2\}$，$B=\{x \mid mx+1=0\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 m 的取值范围是__________.

三、解答题

14. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-6x+8<0\}$，$B=\{x \mid m<x<4m\}$.

(1) 若 $A\subset B$，求实数 m 的取值范围.

(2) 是否存在 m 使得 $A\cup B=A$？若有请求出 m 的范围，若无则说明理由.

15. 已知 $A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant5\}$，$B=\{x \mid m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$，$B\subseteq A$，求 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题

1. C　2. D　3. B　4. A　5. C　6. B　7. B　8. B　9. D

二、填空题

10. -3　7

11. 充分不必要条件

12. 1 988

13. $\left\{0,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right\}$

三、解答题

14. **【解析】**

(1) 依题意得 $A=\{x \mid 2<x<4\}$,

因为 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases} m\leqslant 2, \\ 4m\geqslant 4, \end{cases}$ 则 $m\in[1,\ 2]$.

(2) 若存在 m 使得 $A\cup B=A$ 成立,即有 $B\subseteq A$,

若 $B=\varnothing$,满足 $B\subseteq A$,由 $m\geqslant 4m$ 得 $m\leqslant 0$,

若 $B\neq\varnothing$,则 $\begin{cases} m<4m, \\ m\geqslant 2, \\ 4m\leqslant 4, \end{cases}$ 该方程组无解,

综上得实数 m 的取值范围为 $\{m \mid m\leqslant 0\}$.

15. **【解析】**

当 $m+1>2m-1$,即 $m<2$ 时,$B=\varnothing$,满足 $B\subseteq A$,即 $m<2$;

当 $m+1=2m-1$,即 $m=2$ 时,$B=\{3\}$,满足 $B\subseteq A$,即 $m=2$;

当 $m+1<2m-1$,即 $m>2$ 时,由 $B\subseteq A$,得 $\begin{cases} m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5, \end{cases}$ 即 $2<m\leqslant 3$;

所以 $m\leqslant 3$.